УДК 004.42:534

Програмне забезпечення для дослідження коливального процесу в системі осциляторів з різними масами

Єремєєв Володимир Сергійович, Брянцев Олександр Анатолійович,
Наумук Олексій Володимирович, Самойлов Володимир Вікторович

*Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького,
Мелітополь, Україна*

ІНФОРМАЦІЯ ПРО СТАТТЮ	АНОТАЦІЯ
<p><i>Історія:</i></p> <p>Надійшла: 20.09.2019 Прийнята до публікації: 12.12.2019 Опублікована онлайн: 30.12.2019</p> <hr/> <p><i>Ключові слова:</i></p> <p>коливальний процес математична модель осцилятори програмне забезпечення</p> <hr/> <p>© Єремєєв В. С. © Брянцев О. А. © Наумук О. В. © Самойлов В. В.</p> <p>Стаття ліцензована відповідно до "CC BY 4.0".</p>	<p>Сформульовано математичну модель у вигляді системи диференціальних рівнянь для проведення аналізу коливального процесу в ланцюжку лінійних осциляторів з різними масами. Передбачається, що лівий кінець першого осцилятора закріплений, а до останнього осцилятора прикладена довільна сила. Запропоновано алгоритм вирішення задачі з використанням чисельних методів Ейлера і Рунге-Кутти. Розроблено дві програми Euler і RungK для проведення розрахунків. Код програм складено на алгоритмічній мові C++ в середовищі Microsoft Visual Studio 2012. Точність розрахункових даних залежить від числа осциляторів і часу коливань. Тестування показало, що в разі одного-двох осциляторів програма RungK, заснована на методі Рунге-Кутти, забезпечує точність розрахунків на рівні $10^{-10}\%$. Помилка обчислених параметрів практично не залежить від кількості розбиття часового інтервалу від 10^3 до 10^6. Точність методу Ейлера, який реалізований в програмі Euler, становить при аналогічних умовах близько 0.5%. Підвищення числа ітерацій до 10^4, 10^5 і 10^6 призводить до збільшення точності до 0.05%, 0.005% і 0.0005%, відповідно. Програма може бути використана при аналізі коливальних процесів в ланцюжку лінійних осциляторів.</p>

Software for research oscillation process in the system of oscillators with different masses

Volodymyr Yermieiev, Olexsandr Briantsev,
Oleksii Naumuk, Volodymyr Samoilov

*Bogdan Khmelnytsky Melitopol State Pedagogical University,
Melitopol, Ukraine*

Abstract. A mathematical model is formulated as a system of differential equations for the analysis of the oscillatory process in linear oscillators with different masses. It is assumed that the left end of the first oscillator is fixed and an arbitrary force is attached to the last oscillator. The algorithm for solving the problem using the Euler and Runge-Kutta numerical methods is proposed. Two Euler and RungK applications have been developed for calculations. The program code is compiled in the C++ algorithmic language in Microsoft Visual Studio 2012. The accuracy of the calculated data depends on the number of oscillators and the time of oscillation. Testing showed that in the case of one or two oscillators, the program RungK, based on the Runge-Kutta method, provides $10^{-10}\%$ accuracy of calculations. The error of the calculated parameters is almost independent of the number of time intervals from 10^3 to 10^6 . The accuracy of the Euler method, which is implemented in Euler, is about 0.5% under similar conditions. Increasing the number of iterations to 10^4 , 10^5 , and 10^6 leads to the increase in accuracy to 0.05%, 0.005%, and 0.0005%, respectively. The software can be useful in the analysis of oscillatory processes in a linear oscillate ditch.

Keywords: oscillatory process; mathematical model; oscillators; software.

Вступ

Постановка проблеми. Становлення виробничого потенціалу України неможливе без дослідження коливальних систем, які широко застосовуються на практиці. Окрім позитивного впливу на оточуюче середовище колювання можуть здійснювати і шкідливий вплив. Наприклад, широко відоме явище резонансу, що може призвести у деяких випадках до негативних наслідків. Через розповсюдженість коливальних процесів у природі та техніці дослідження коливальних систем і моделювання їх поведінки є актуальною задачею.

Аналіз колювань у складних системах передбачає виконання великого обсягу обчислень, реалізація яких можлива тільки з використанням чисельних методів. В роботі ([Еремеев, & Попазов, 2017](#)) створена програма, яка дозволяє визначати параметри коливального процесу в системі з пружинних маятників з однаковими масами при початкових нульових умовах. Подібні програми дозволяють отримувати цінну інформацію про вплив різних чинників на поведінку системи, тому проведення досліджень у цьому напрямку становить практичний інтерес. Це дослідження присвячено розробці програмних засобів для аналізу колювань у ланцюжку осциляторів з різними масами у випадку довільних початкових умов.

Важливий факт, що будь-яка більш-менш складна задача на складання й опрацювання математичної моделі, до якої предметної

галузі ми б її не віднесли, як правило вимагає залучення відомостей з низки інших галузей. Дійсно, опрацьовуючи задачі, нам доводиться звертатись до математики, статистики, системного аналізу тощо, але насамперед ми зобов'язані обрати комп'ютерне середовище для моделювання ([Теплицький, & Семеріков, 2013](#)).

Математичні моделі колювань описані у багатьох літературних джерелах ([Еремеев, Кузьминов, Брежнев, Донева, & Петренко, 2016](#); [Еремеев, & Попазов, 2017](#); [Савельев, 1989](#)). Аналітичні рішення отримані у найпростіших випадках колювань з однією або двома масами ([Еремеев, Кузьминов, Брежнев, Донева, & Петренко, 2016](#); [Еремеев, & Попазов, 2017](#); [Савельев, 1989](#); [Трубецков, & Рожнев, 2001](#)). Проте при наявності зовнішнього навантаження або при збільшенні числа осциляторів до трьох і більше вирішення задачі ускладнюється, у цьому випадку слід застосувати чисельні методи та засоби автоматизації моделювання коливальних процесів. Для вивчення закономірностей коливальних процесів зазвичай використовують модельні експерименти або математичні моделі із залученням програмних засобів. З метою розробки програм для реалізації чисельних алгоритмів можна використовувати інтегровані середовища розробки (ICP), а також системи комп'ютерної математики (СКМ).

СКМ – це спеціалізовані комп'ютерні програми, які дозволяють виконувати символічні математичні обчислення (алгебраїчні, тригонометричні перетворення з

невідомими, матричні перетворення, отримання аналітичних виразів для похідних функцій тощо). Будь-яка сучасна СКМ має внутрішню мову програмування, яка включає усі основні логічні конструкції, властиві будь-якій мові програмування високого рівня. Найбільш відомими СКМ є Maple, MatLab, MathCad, Mathematica.

ІСР – це комплекс програмних засобів, який використовується для розробки програмного забезпечення і включає текстовий редактор, компілятор та/або інтерпретатор, засоби автоматизації збирання, налагоджувач. Іноді містить також засоби для інтеграції з системами керування версіями і різноманітні інструменти для спрощення конструювання графічного інтерфейсу користувача. Сучасні ІСР зазвичай призначені для декількох мов програмування, наприклад: NetBeans, Eclipse, Embarcadero RAD Studio або Microsoft Visual Studio.

Останнім часом для вирішення технічних завдань із залученням математичних методів багато програмістів віддають перевагу середовищу Microsoft Visual Studio. Воно має низку цінних якостей: надає можливість програмування кількома мовами (Visual C#, Visual C++, Python, JavaScript), забезпечує багатозадачність за допомогою сторінки «Моя робота», збирання й аналіз даних у робочому середовищі, вдосконалення архітектури шляхом моделювання.

З метою отримання адекватної інформації у процесі дослідження коливальних систем під впливом зовнішнього навантаження необхідно виконати такі основні завдання: формулювання завдання з чітко поставленими вихідними даними й обмеженнями; розробка коректної математичної моделі; вибір програмних засобів; розробка програми; тестування програми; проведення аналізу отриманих даних.

Наше дослідження спрямоване на розробку програмного забезпечення для аналізу коливальних у ланцюжку осциляторів з різними масами під дією зовнішнього навантаження. Для вирішення цього завдання обрано мову програмування C++ і середовище Microsoft Visual Studio 2012.

Коливальна система представлена у вигляді ланцюжка пружинних маятників з лінійними зв'язками (рис. 1). Лівий край першої пружини жорстко закріплений, на останню масу діє сила $F(t)$ у напрямку осі абсцис.

Рис. 1. Система з n пружинних маятників

Мета статті. створити математичну модель коливальних, вибрати метод чисельного рішення і розробити програму, яка дозволить здійснювати моделювання коливальних процесів у ланцюжку лінійних осциляторів з різними масами за наявності або відсутності зовнішнього навантаження.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Математична модель коливальних в системі осциляторів

Математичні моделі окремих випадків коливальних процесів наведені у наукових і навчально-методичних джерелах ([Савельєв, 1989](#); [Трубецков, & Рожнев, 2001](#)).

Розглянемо коливання у системі з n з'єднаних послідовно пружинних маятників (рис. 1). Позначимо через $y_i(t)$ переміщення мас m_i вздовж напрямку коливальних щодо лівого закріпленого кінця пружини першого осцилятора, а через k_i коефіцієнти жорсткості пружин. Швидкості коливальних центрів мас дорівнюють:

$$v_i = \frac{dy_i}{dt}. \quad (1)$$

Припустимо, що сила, яка діє на осцилятор, пропорційна деформації пружини і додатково визначається зовнішнім навантаженням $F(t)$. У цьому випадку динамічні рівняння для розрахунку прискорень переміщення центрів мас мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \frac{1}{m_1} [k_1(-y_1 + y_{1,0}) + k_2(y_2 - y_1 + y_{1,0} - y_{2,0})], \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} [k_i(y_{i-1} - y_i + y_{i,0} - y_{i-1,0}) + k_{i+1}(y_{i+1} - y_i + y_{i,0} - y_{i+1,0})], i = \overline{2..(n-1)} \\ \frac{d^2 y_n}{dt^2} &= \frac{1}{m_n} k_n(y_{n-1} - y_n + y_{n,0} - y_{n-1,0}) + F(t).\end{aligned}\quad (2)$$

Коливальні процеси з заданими початковими умовами

$$y_i(0)=a_i; \quad v_i(0)=b_i, \quad i = \overline{1...n}. \quad (3)$$

однозначно визначаються системою рівнянь (1) і (2).

Математичну модель коливань зручно представити за допомогою $2n$ диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned}\frac{dy_i}{dt} &= v_i, \\ \frac{dv_i}{dt} &= W_i, i = \overline{1...n},\end{aligned}\quad (4)$$

де:

$$\begin{aligned}W_1 &= \frac{1}{m_1} [k_1(-y_1 + y_{1,0}) + k_2(y_2 - y_1 + y_{1,0} - y_{2,0})], \\ W_i &= \frac{1}{m_i} [k_i(y_{i-1} - y_i + y_{i,0} - y_{i-1,0}) + k_{i+1}(y_{i+1} - y_i + y_{i,0} - y_{i+1,0})], i = \overline{2..(n-1)}, \\ W_n &= \frac{1}{m_n} [k_n(y_{n-1} - y_n + y_{n,0} - y_{n-1,0}) + F(t)].\end{aligned}\quad (5)$$

Математична модель (3) – (5) має такі фізичні обмеження:

- сила, яка діє на осцилятор з боку пружини, пропорційна величині розтягування або стиснення пружини;
- у системі відсутні сили тертя;
- хиткі маси не приходять в зіткнення з сусідніми елементами.

Ці та інші обмеження при необхідності можуть бути враховані. Труднощі аналізу коливань полягають не стільки в моделюванні коливального процесу, скільки в розробці алгоритму обчислень, що забезпечить потрібну точність обчислень.

Задача про гармонічні коливання одного осцилятора під дією зовнішнього навантаження вивчена достатньо докладно

([Савельєв, 1989](#); [Трубецков, & Рожнев, 2001](#)). Збільшення ступенів свободи призводить до зростання складності аналітичного рішення рівнянь (1) – (2). Як приклад розглянемо рішення, отримане в роботі ([Еремеев, Кузьминов, Брежнев, Донева, & Петренко, 2016](#)) для гармонічних коливань двох осциляторів без зовнішнього навантаження. В цьому випадку система кінематичних рівнянь (1) спільно з динамічними рівняннями (2) спрощується:

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{k_1+k_2}{m_1} y_1 + \frac{k_2}{m_1} y_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{k_2}{m_2} y_1 - \frac{k_2}{m_2} y_2. \quad (6)$$

Згідно з ([Еремеев, Кузьминов, Брежнев, Донева, & Петренко, 2016](#)) аналітичне рішення рівнянь (6) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} + C_3 \begin{pmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} e^{\lambda_3 t} + C_4 \begin{pmatrix} \gamma_{14} \\ \gamma_{24} \\ \gamma_{14} \\ \gamma_{24} \end{pmatrix} e^{\lambda_4 t}. \quad (7)$$

де λ_i – корені характеристичного рівняння, які визначаються формулами (8), а $(\gamma_{1i}, \gamma_{2i}, \gamma_{3i}, \gamma_{4i})$ – власні вектори, які визначаються рівняннями (9).

$$\lambda_{1,4} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \pm \sqrt{\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)^2 - \frac{4k_1 k_2}{m_1 m_2}}} \quad (8)$$

$$\begin{cases} -\lambda_i \gamma_{1i} + \gamma_{3i} = 0 \\ -\lambda_i \gamma_{2i} + \gamma_{4i} = 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} \gamma_{1i} + \frac{k_2}{m_2} \gamma_{2i} - \lambda_i \gamma_{3i} = 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \gamma_{1i} - \frac{k_2}{m_2} \gamma_{2i} - \lambda_i \gamma_{4i} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

З формул (7) – (9) видно, що аналітичне рішення є громіздким навіть для простого випадку коливання двох осциляторів без навантажень. За наявності зовнішніх впливів або при переході до трьох і більше осциляторів отримання аналітичного рішення є неможливим і необхідно використовувати чисельні методи ([Еремеев, Кузьминов, Брежнев, Донева, & Петренко, 2016](#)).

Рішення рівнянь (7) – (8) для коливань у системі осциляторів з однаковими масами і нульовими початковими умовами:

$$y_i(0)=0; v_i(0)=0, i=\overline{1...n}. \quad (10)$$

Розглянемо коливальний процес для довільних початкових умов (3) у випадку різних мас. Розіб'ємо розглянутий проміжок часу $[0, T]$ на J відрізків довжиною $h=T/J$. Позначимо швидкості центрів мас $v_i(t)$ у вузлових точках j з координатами у часі $t_j=0, h, 2h, \dots, T$ через $v_i^{(j)}(t_j)$, $j=\overline{1...J}$. Припустимо, що переміщення $y_i^{(j)}$ і швидкості переміщень $v_i^{(j)}$ у

j -му відомі. Збережемо відповідні значення в одновимірних масивах $MassY$ і $MassV$ з n елементів, що містять, відповідно, переміщення і швидкості переміщення.

Для проведення обчислень значень $y_i^{(j+1)}$ і $v_i^{(j+1)}$ у $j+1$ -му вузлі скористаємося методом Рунге-Кутти ([Самарский, 2005](#)). Розрахункові формули представимо у вигляді

$$y_i^{(j+1)} = y_i^{(j)} + h(v_i^{(j)} + 2v_i^{(j)} + 2v_i^{(j)} + v_i^{(j)})/6 \quad (11)$$

$$v_i^{(j+1)} = v_i^{(j)} + h(K_i^{(j)} + 2K_i^{(j)} + 2K_i^{(j)} + K_i^{(j)})/6 \quad (12)$$

Параметри $K_i^{(j)}, K_i^{(j)}, \dots$ у формулі (12) визначаються функціями (5). Кожна з них залежить від значень переміщень для кількох сусідніх осциляторів. З метою спрощення подальших записів введемо n -мірний вектор Y з координатами переміщень усіх осциляторів $y_1, y_1, \dots, y_n$. У цьому випадку параметри $V^{(j)}, V^{(j)}, \dots, K^{(j)}, K^{(j)}, \dots$ у виразах (10), (11) визначаються формулами:

$$\begin{aligned} V_i^{(j)} &= v_i^{(j)}; & K_i^{(j)} &= W_i(t^{(j)}, Y_i^{(j)}); \\ V_i^{(j)} &= v_i^{(j)} + K_i^{(j)} h/2; & K_i^{(j)} &= W_i(t^{(j)} + h/2, Y_i^{(j)}); \end{aligned} \quad (13)$$

$$V_i^{(j)2} = v_i^{(j)} + K_i^{(j)1}h/2; \quad K_i^{(j)2} = W_i(t^{(j)} + h/2, Y_{2i}^{(j)});$$

$$V_i^{(j)3} = v_i^{(j)} + K_i^{(j)2}h; \quad K_i^{(j)3} = W_i(t^{(j)} + h, Y_{3i}^{(j)}),$$

де $Y_{0i}^{(j)}, Y_{1i}^{(j)} \dots$ містять інформацію про компоненти вектора Y в точках, відповідних формулам Рунге-Кутти в j -му вузлі, а саме:

$$Y_{0i}^{(j)} = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)}),$$

$$Y_{0i}^{(j)} = (y_{i-1}^{(j)}, y_i^{(j)}, y_{i+1}^{(j)}), \text{ якщо } i > 1, i < n,$$

$$Y_{0n}^{(j)} = (y_{n-1}^{(j)}, y_n^{(j)}).$$

$$Y_{1i}^{(j)} = (y_1^{(j)} + V_1^{(j)0} * h/2, y_2^{(j)} + V_2^{(j)0} * h/2),$$

$$Y_{1i}^{(j)} = (y_{i-1}^{(j)} + V_{i-1}^{(j)0} * h/2, y_i^{(j)} + V_i^{(j)0} * h/2, y_{i+1}^{(j)} + V_{i+1}^{(j)0} * h/2), \text{ якщо } i > 1, i < n,$$

$$Y_{1n}^{(j)} = (y_{n-1}^{(j)} + V_{n-1}^{(j)0} * h/2, y_n^{(j)} + V_n^{(j)0} * h/2).$$

$$Y_{2i}^{(j)} = (y_1^{(j)} + V_1^{(j)1} * h/2, y_2^{(j)} + V_2^{(j)1} * h/2),$$

$$Y_{2i}^{(j)} = (y_{i-1}^{(j)} + V_{i-1}^{(j)1} * h/2, y_i^{(j)} + V_i^{(j)1} * h/2, y_{i+1}^{(j)} + V_{i+1}^{(j)1} * h/2), \text{ якщо } i > 1, i < n,$$

$$Y_{2n}^{(j)} = (y_{n-1}^{(j)} + V_{n-1}^{(j)1} * h/2, y_n^{(j)} + V_n^{(j)1} * h/2).$$

$$Y_{3i}^{(j)} = (y_1^{(j)} + V_1^{(j)2} * h/2, y_2^{(j)} + V_2^{(j)2} * h/2),$$

$$Y_{3i}^{(j)} = (y_{i-1}^{(j)} + V_{i-1}^{(j)2} * h/2, y_i^{(j)} + V_i^{(j)2} * h/2, y_{i+1}^{(j)} + V_{i+1}^{(j)2} * h/2), \text{ якщо } i > 1, i < n,$$

$$Y_{3n}^{(j)} = (y_{n-1}^{(j)} + V_{n-1}^{(j)2} * h/2, y_n^{(j)} + V_n^{(j)2} * h/2).$$

Метод Ейлера є окремим випадком методу Рунге-Кутти, коли у процесі обчислення переміщень і швидкостей переміщень у $(j+1)$ -му вузлі замість формул (11), (12) використовуються вирази

$$y_i^{(j+1)} = y_i^{(j)} + h v_i^{(j)}, \quad (14)$$

$$v_i^{(j+1)} = v_i^{(j)} + h K_i^{(j)}. \quad (15)$$

Параметри $K_i^{(j)}$ у формулі (15) визначаються функціями W_i , формули (5):

$$K_i^{(j)0} = W_i(t^{(j)}, Y_i^{(j)}), \quad (16)$$

де $Y_i^{(j)}$ містять інформацію про компоненти вектора Y в точках, відповідних формулам Ейлера в j -му вузлі:

$$Y_1^{(j)} = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)}),$$

$$Y_i^{(j)} = (y_{i-1}^{(j)}, y_i^{(j)}, y_{i+1}^{(j)}), \quad (17)$$

$$Y_n^{(j)} = (y_{n-1}^{(j)}, y_n^{(j)}).$$

Метод Ейлера має меншу точність у порівнянні з методом Рунге-Кутти, але для його реалізації потрібно менше витрат машинного часу.

Розробка алгоритму розрахунку і програмного забезпечення

Алгоритм проведення розрахунків виглядає так.

Перший крок. Встановлюється навантаження, що визначає вплив зовнішньої сили. В окремому випадку вона може бути представлена у вигляді константи P , лінійної функції $F(t) = a + bt$ або періодичної функції з однією гармонікою $F(t) = A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$, де A_i – амплітуда, ω_i – частота, φ_i – фаза. У загальному випадку величину зовнішньої сили зручно виразити за допомогою урізаного ряду Фур'є у вигляді суми K гармонік:

$$F(t) = P + \sum_{i=1}^{i=K} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \quad (18)$$

Другий крок. Вибираються характеристики системи і початкові умови (маси осциляторів, жорсткості пружин, початкові умови для переміщень і швидкостей осциляторів, параметри зовнішнього навантаження).

Третій крок. Використовуючи початкові умови (3), заповнюються чарунки пам'яті $v_1^{(j)}$, $y_1^{(j)1}$ для початкового часу $t_j=0$.

Четвертий крок. Обчислюються переміщення і швидкості на першому, другому і наступних кроках, поки не буде досягнутий останній крок з номером J .

Розробку програмного забезпечення здійснено засобами мови програмування C++ у середовищі *Microsoft Visual Studio 2012*.

Створено дві програми:

а) Програма *RungK*, яка реалізує алгоритм обчислень параметрів коливань осциляторів при наявності зовнішнього навантаження методом Рунге-Кутти у відповідності з формулами (5), (11) – (13).

б) Програма *Euler*, заснована на алгоритмі розрахунку параметрів коливань осциляторів при наявності зовнішнього навантаження у відповідності з формулами (5), (14) – (17).

Програми складаються з інтерфейсної частини і модуля, який забезпечує виконання розрахунків. Вихідні дані повинні містити необхідну інформацію відповідно до обраної математичною моделі, а саме:

- коефіцієнти жорсткості пружини;
- величини мас осциляторів;
- початкові значення зміщення центрів мас;
- початкові значення швидкості зсуву центрів мас;
- характеристики зовнішнього навантаження.

Розроблені функції забезпечують виконання таких операцій:

- вибір режиму функціонування програми (демонстраційний або з використанням даних, що встановлюються користувачем);
- розрахунок і виведення зміщення центру маси обраного осцилятора в залежності від

часу і початкових умов при наявності або відсутності зовнішнього навантаження;

- розрахунок і виведення швидкості зсуву центру маси обраного осцилятора у залежності від часу і початкових умов при наявності або відсутності зовнішнього навантаження.

Проведення обчислень забезпечується функціями:

1. *Function*, що характеризує зовнішнє навантаження.
2. *F_Right_W*, що обчислює прискорення осциляторів з використанням правої частини рівнянь коливань (5).
3. *Calculations*, що забезпечує розрахунок переміщення і швидкості на кожній ітерації.
4. *Interfase*, що відповідає за введення і виведення даних.

За запуску програми на дисплеї виводиться запит на введення вихідних даних ([рис. 2](#)). Якщо користувач вирішив ознайомитися з демонстраційним варіантом, на дисплей виводяться параметри коливального процесу одного з осциляторів ([рис. 3](#)).

Для запуску демонстрационного варианта нажмите клавишу у
Для расчёта Вашего варианта нажмите любую другую клавишу

Рис. 2. Запит на виведення демонстраційного варіанта або на введення даних користувачем

```

Метод Эйлера, число итераций 1000
Перемещения и скорости осциллятора с номером 1
при начальных условиях:
Массы осцилляторов: 1; 1
Коэффициенты жёсткости осцилляторов: 1; 0
Начальные смещения осцилляторов: 1; 0
Начальные скорости осцилляторов: 0; 0
Постоянная нагрузка: 0
Амплитуда: 0. Частота: 0. Фаза: 0
Время    Перемещение    Скорость
0.00000    1.00000    0.00000
0.31416    0.95153    -0.30917
0.62832    0.80982    -0.58836
0.94248    0.58866    -0.81021
1.25664    0.30963    -0.95293
1.57080    0.00001    -1.00247
1.88496    -0.30993    -0.95388
2.19911    -0.58981    -0.81182
2.51327    -0.81221    -0.59012
2.82743    -0.95529    -0.31040
3.14159    -1.00495    -0.00001

```

Рис. 3. Результати розрахунку методом Ейлера переміщення і швидкості переміщення першого осцилятора у системі з двох осциляторів

ТЕСТУВАННЯ ПРОГРАМ ТА ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Тестування програмного продукту проводилося шляхом порівняння результатів розрахунку з використанням програм і точного аналітичного рішення коливань одного гармонічного осцилятора.

Згідно з ([Савельєв, 1989](#)) рівняння коливань одного осцилятора має вигляд:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = F(t). \quad (19)$$

Рішення рівняння (19) з граничними умовами

$$y(0)=y_0; v(0)=v_0 \quad (20)$$

представимо у формі:

$$y = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{1}{\sqrt{km}} \int_0^t F(\tau) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)\right) d\tau. \quad (21)$$

Порівняльний аналіз точного і чисельного рішень проводився за таких умов:

$$y_0=1, v_0=0, m=1, k=1, F=0. \quad (22)$$

Залежність переміщення від часу при граничних умовах (22) описує косинусоїда

([рис. 4](#)). Чисельні значення зміщення осциляторів і швидкості їх зсувів, отримані методами Ейлера і Рунге-Кутти, представлені відповідно на [рис. 3](#) і [рис. 5](#).

Рис. 4. Залежність переміщення осцилятора від часу в інтервалі [0.00, 12.57]

Метод Рунга-Кутта, число итераций 1000
 Перемещения и скорости осцилятора
 при начальных условиях:
 Масса осцилятора: 1
 Коэффициент жёсткости: 1
 Начальное смещение: 1
 Начальная скорость: 0
 Амплитуда: 0. Частота: 0. Фаза: 0

Время	Перемещение	Скорость
0.000000000000	1.000000000000	0.000000000000
0.314159265360	0.951056516295	-0.309016994376
0.628318530720	0.809016994374	-0.587785252294
0.942477796080	0.587785252291	-0.809016994376
1.256637061440	0.309016994372	-0.951056516296
1.570796326800	-0.000000000004	-1.000000000000
1.884955592160	-0.309016994379	-0.951056516294
2.199114857520	-0.587785252297	-0.809016994372
2.513274122880	-0.809016994379	-0.587785252288
2.827433388240	-0.951056516297	-0.309016994368
3.141592653600	-1.000000000000	0.000000000008

Рис. 5. Значення переміщення і швидкості переміщення осцилятора, отримані методом Рунге-Кутти

Відмінність результатів обчислень методом Рунге-Кутти, наведених на [рис. 5](#), від аналітичного рішення з використанням формули (21) становить близько $1 \times 10^{-10}\%$. Тестові розрахунки показали, що при збільшенні числа вузлів J з 10^3 до 10^6 відмінність зберігається на рівні $1 \times 10^{-10}\%$. У багатьох практичних завданнях допустима похибка становить (0.1-1.0)%, тому можна очікувати, що точність обчислень при аналізі систем з великим числом осциляторів збережеться на достатньо високому рівні.

Демонстраційний режим на [рис. 3](#) стосується розрахунків для системи з двох осциляторів, які отримані методом Ейлера. Проте оскільки коефіцієнт жорсткості другого осцилятора дорівнює 0, то в даному випадку фактично йдеться про коливання одного осцилятора. Порівняння даних на [рис. 3](#) і [рис. 4](#) з точним рішенням, отриманим за формулою (21), засвідчує, що метод Рунге-Кутти є набагато точнішим. Однак метод Ейлера також має досить високу точність: в інтервалі часу $[0; 1.57]$ вона оцінюється в $1 \times 10^{-3}\%$, а в інтервалі $[1.57; 3.14]$ – близько 0.5%. Збільшення числа ітерацій призводить до істотного зниження похибки. Наприклад, при кількості ітерацій, що дорівнює 1×10^4 , 1×10^5 та 1×10^6 точність обчислень методом Ейлера для інтервалу $[1.57; 3.14]$ оцінюється 0.05%, 0.005% і 0.0005%, відповідно.

На [рис. 6](#) представлений приклад коливань одного осцилятора при постійному навантаженні.

Результати розрахунків, наведені на [рис. 6](#), відповідають нульовим початковим умовам для осцилятора з масою 1.00 і жорсткістю пружини 1.00. З [рис. 6](#) видно, що постійне в часі зовнішнє навантаження призводить до періодичного коливання з періодом 2π , при цьому переміщення змінюються від 0.00 до 10.00 з амплітуди, що дорівнює 5.00. При зміні початкового переміщення періодичність коливання не змінюється, однак переміщення відбуваються в іншому діапазоні. Наприклад, при початковому зсуві, що дорівнює 3.00, переміщення змінюється щодо координати 5.00 з амплітудою, що дорівнює 2.00 ([рис. 7](#)).

Цікаво відзначити, що коливальний процес у випадку збігу постійного зовнішнього навантаження з початковим зміщенням відсутній ([рис. 8](#)).

Розрахунки, виконані з використанням програми *Euler* з вихідними даними з [рис. 8](#), повністю збігаються з розрахунками, отриманими у програмі *RungK*. Це ще раз підтверджує близькість результатів, що одержуються з використанням обраних алгоритмів обчислень. На [рис. 9](#) представлений приклад коливання другого осцилятора у ланцюжку з двох осциляторів при наявності зовнішнього навантаження.

Метод Рунга-Кутта, число итераций 100000
Перемещения и скорости осциллятора
при начальных условиях:
Масса осциллятора: 1.00
Коэффициент жёсткости: 1.00
Начальное смещение: 0.00
Начальная скорость: 0.00
Амплитуда: 0.00
Частота: 0.00. Фаза: 0.00
Постоянная нагрузка: 5.00

Время	Перемещение	Скорость
0.00000	0.00000	0.00000
1.57080	5.00000	5.00000
3.14159	10.00000	-0.00000
4.71239	5.00000	-5.00000
6.28319	0.00000	0.00000
7.85398	5.00000	5.00000
9.42478	10.00000	-0.00000

Рис. 6. Тимчасова залежність переміщення і швидкості переміщення осцилятора з нульовими початковими умовами при наявності постійного навантаження

```

Метод Рунга-Кутта, число итераций 10000
Перемещения и скорости осциллятора
при начальных условиях:
Масса осциллятора: 1.000
Коэффициент жёсткости: 1.000
Начальное смещение: 3.000
Начальная скорость: 0.000
Амплитуда: 0.00
Частота: 0.00. Фаза: 0.00
Постоянная нагрузка: 5.00

```

Время	Перемещение	Скорость
0.00000	3.00000	0.00000
1.57080	5.00000	2.00000
3.14159	7.00000	-0.00000
4.71239	5.00000	-2.00000
6.28319	3.00000	0.00000
7.85398	5.00000	2.00000
9.42478	7.00000	-0.00000
10.99557	5.00000	-2.00000
12.56637	3.00000	0.00000

Рис. 7. Тимчасова залежність переміщення і швидкості переміщення гармонійного осцилятора при наявності постійного навантаження, що дорівнює 5, для початкового зсуву, рівного 3.00

```

Метод Рунга-Кутта, число итераций 10000
Перемещения и скорости осциллятора
при начальных условиях:
Масса осциллятора: 1.000
Коэффициент жёсткости: 1.000
Начальное смещение: 5.000
Начальная скорость: 0.000
Амплитуда: 0.00
Частота: 0.00. Фаза: 0.00
Постоянная нагрузка: 5.00

```

Время	Перемещение	Скорость
0.00000	5.00000	0.00000
1.57080	5.00000	0.00000
3.14159	5.00000	0.00000
4.71239	5.00000	0.00000
6.28319	5.00000	0.00000
7.85398	5.00000	0.00000
9.42478	5.00000	0.00000

Рис. 8. Приклад відсутності коливань при збігу початкового зсуву з величиною постійного зовнішнього навантаження

```

Метод Эйлера, число итераций 1000000
Перемещения и скорости осциллятора с номером 2
при начальных условиях:
Массы осцилляторов: 1.1; 1.5
Коэффициенты жёсткости осцилляторов: 1; 1.5
Начальные смещения осцилляторов: 0.7; 0.9
Начальные скорости осцилляторов: 1.2; 0.3
Постоянная нагрузка: 1.4
Амплитуда: 1.1. Частота: 0.7. Фаза: 2.1

```

Время	Перемещение	Скорость
0.00	0.9000	0.3000
0.3142	1.0641	0.7493
0.6283	1.3696	1.1869
0.9425	1.8000	1.5314
1.2566	2.3147	1.7136
1.5708	2.8555	1.6942
1.8850	3.3581	1.4746
2.1991	3.7652	1.0959
2.5133	4.0374	0.6288
2.8274	4.1596	0.1546
3.1416	4.1414	-0.2548

Рис. 9. Тимчасова залежність переміщення і швидкості переміщення другого осцилятора з ненульовими початковими умовами при наявності зовнішнього навантаження, яка визначається формулою $F(t)=1.1\sin(0.7t+2.1)$

Результати розрахунків на [рис. 9](#) відповідають таким характеристикам коливального процесу в ланцюжку з двох осциляторів: число ітерацій 106; маси осциляторів 1.1 і 1.5; коефіцієнти жорсткості пружин 1.0 і 1.5; початкові зміщення осциляторів 0.7 і 0.9; початкові швидкості зсуву осциляторів 1.2 і 0.3; постійна складова навантаження 1.4; амплітуда навантаження 1.1; частота навантаження 0.7; фаза 2.1.

З [рис. 9](#) видно, що зміщення центру мас другого осцилятора в інтервалі часу від 0.0000 до 3.1416 збільшується від 0.9000 до 4.1414. Швидкість зміщення в інтервалі часу від 0.0000 до 1.2566 спочатку підвищується від 0.3000 до 1.7136, потім починає знижуватися і при $t = 3.1416$ стає від'ємною (-0.2548). Помилка розрахунків при кількості ітерацій $J = 106$ не перевищує 0.0005%.

Графік залежності переміщення другого осцилятора в системі з трьох осциляторів від часу представлений на [рис. 10](#).

Рис. 10. Часова залежність переміщення першого осцилятора з ненульовими початковими умовами при наявності зовнішнього навантаження, яка визначається формулою $F(t)=0.1\sin(0.3t+0.7)$

Розрахунки, результати яких представлені на [рис. 10](#), виконані методом Рунге-Кутти для таких даних: маси осциляторів 1.0, 1.0, 1.0; коефіцієнти жорсткості пружин 2.0, 3.0, 4.0; початкові зміщення осциляторів -0.1, 0.2, 0.1; початкові швидкості зсуву осциляторів 0.1, -0.1, 0.2; амплітуда навантаження 0.1; частота навантаження 0.3; фаза 0.7.

Варіантні розрахунки дозволили виявити кілька типів коливальних процесів:

1) Коливання з невеликим числом ступенів свободи (один-два осцилятори). У цьому випадку незалежно від початкових умов і параметрів періодичних впливів проявляється періодичний або резонансний характер переміщень. Приклад таких коливань у системі з двох осциляторів наведено на [рис. 11](#).

Рис. 11. Періодичний характер коливань першого осцилятора у системі з двох елементів при зовнішньому впливі силою $F(t)=0.2\sin(0.2t+0.1)$

Розрахунки для побудови графіка на [рис. 11](#) проводились методом Рунге-Кутти при таких даних: маси осциляторів 1.0, 1.0; коефіцієнти жорсткості пружин 0.3, 0.6; початкові зміщення осциляторів +0.7, -0.2; початкові швидкості зсуву осциляторів 0.2, 0.3; амплітуда навантаження 0.1; частота навантаження 0.3; фаза 0.7.

2) Коливання з великою кількістю ступенів свободи (три і більше осциляторів), коли переміщення не є періодичними. Приклад такого коливання першого осцилятора у системі з п'яти елементів представлений на [рис. 12](#).

При побудові залежності, представленої на [рис. 12](#), розрахунки проводилися методом Рунге-Кутти за таких вихідних даних: однакові маси осциляторів та однакові коефіцієнти жорсткості пружин – 1.0; початковий зсув четвертого осцилятора – 0.8; зміщення інших центрів мас дорівнювали нулю; початкові швидкості зсуву всіх осциляторів дорівнювали нулю; зовнішнє навантаження було відсутнє.

Рис. 12. Неперіодичний характер коливань першого осцилятора у системі з п'яти елементів при відсутності зовнішнього навантаження (метод Рунге-Кутти)

3) Коливання з великою кількістю ступенів свободи при наявності зовнішнього впливу, які можуть призвести до виникнення резонансу. Цей випадок має великий практичний інтерес при вивченні проєктованих коливальних систем, коли потрібно перевірити їх на предмет можливості виникнення резонансних явищ.

Висновки

Розроблено програми RungK і Euler для дослідження коливань у ланцюжку з n лінійних осциляторів. Математична модель коливального процесу представлена у вигляді системи з $2n$ осциляторів. Для проведення розрахунків у програмі RungK використовувався метод Рунге-Кутти, в програмі Euler – метод Ейлера.

Відмінність результатів обчислень методом Рунге-Кутти, наведених на [рис. 5](#), від аналітичного рішення з використанням формули (21) становить близько $1 \times 10^{-10}\%$. Тестові розрахунки показали, що при збільшенні числа вузлів J з 10^3 до 10^6 відмінність зберігається на рівні $1 \times 10^{-10}\%$. У багатьох практичних завданнях допустима похибка становить (0.1-1.0)%, тому можна очікувати, що точність обчислень при аналізі систем з великим числом осциляторів збережеться на достатньо високому рівні.

Метод Ейлера має меншу точність у порівнянні з методом Рунге-Кутти, але для його реалізації потрібні менші витрати машинного часу. Помилка методу в інтервалі

часів $[0.00; 1.57]$ оцінюється в $1 \times 10^{-3}\%$, а в інтервалі $[1.57; 3.14]$ – близько 0.5%. Збільшення числа ітерацій призводить до істотного зниження похибки. Наприклад, при кількості ітерацій, яка дорівнює 104, 105 і 106, помилка для інтервалу $[1.57; 3.14]$ оцінюється 0.05%, 0.005% і 0.0005%, відповідно.

Коливання з невеликою кількістю ступенів свободи мають періодичний або резонансний характер. Приклад таких коливань у системі з двох осциляторів наведено на [рис. 11](#). Коливання з великим числом ступенів свободи належать до неперіодичних. Приклад таких коливань в системі з п'яти елементів представлений на [рис. 12](#). Коливання з великою кількістю ступенів свободи при наявності зовнішнього впливу також можуть протікати у резонансному режимі. Цей випадок має великий практичний інтерес при вивченні проєктованих коливальних систем, коли необхідно перевірити їх на предмет можливості виникнення резонансних явищ.

Розроблене програмне забезпечення може бути використано з метою дослідження коливальних процесів у лінійних системах пружинних осциляторів. Воно дозволяє дослідити вплив маси і жорсткості сполучених елементів, а також параметрів зовнішнього впливу на переміщення і швидкість переміщення осциляторів. Коректне використання запропонованих алгоритмів обчислень визначається математичною моделлю, яка не враховує сили тертя і можливість зіткнення сусідніх мас одна з одною. Зняття цих обмежень розширить сферу застосування моделі, тому робота у цьому напрямку має практичний інтерес і буде продовжена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Еремеев, В. С., Кузьминов, В. В., Брежнев, А. В., Донева, О. В., & Петренко И. А. (2016). Проблема моделирования колебательных процессов в одномерных кристаллах с использованием математических маятников. *Университетская Наука*, (1), 172-174.
- Еремеев, В., & Попазов, Н. (2017). Компьютерное моделирование колебательных процессов в цепочке линейных осцилляторов. *Інформаційні технології в освіті та науці: зб. наук. праць*, (9),

- 104-110. Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького.
- Савельев, И. В. (1989). *Курс общей физики. Том I. Механика, колебания и волны, молекулярная физика*. Москва: Наука.
- Самарский, А. А. (2005). *Введение в численные методы*. Учебное пособие для вузов. Санкт-Петербург: Лань.
- Теплицький, І. О., & Семеріков, С. О. (2013). На перехресті екології, математики, інформатики й фізики. В *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики*: зб. наук. праць. Вип. XI, Т. 3: Теорія та методика навчання інформатики (с. 174-184). Кривий Ріг: Видавничий відділ КМІ. Взято з <http://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/0564/976>.
- Трубецков, Д. И., & Рожнев, А. Г. (2001). *Линейные колебания и волны*: Учебное пособие. Москва: Физматлит.
- Eremeev, V., & Popazov, N. (2017). Computer simulation of oscillatory processes in a chain of linear oscillators. *Informatsiini tekhnologii v osviti ta nauksi*: zb. nauk. prats, (9), 104-110. Melitopol: Bogdan Khmel'nitsky Melitopol State Pedagogical University. (in Russian)
- Savel'ev, I. V. (1989). *General physics course. Volume I. Mechanics, vibrations and waves, molecular physics*. Moscow: Nauka. (in Russian)
- Samarskij, A. A. (2005). *Introduction to numerical methods*. Textbook for universities. Saint-Petersburg: Lan'. (in Russian)
- Teplytskyi, I. O., & Semerikov, S. O. (2013). At the crossroads of ecology, mathematics, computer science and physics. In *Theory and methodology of teaching mathematics, physics, computer science: a collection of scientific works*, 11(3): Theory and methodology of teaching computer science (pp. 174-184). Kryvyi Rih: Vydavnychiy viddil KMI. Retrieved from <http://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/0564/976>. (in Ukrainian)
- Trubeckov, D. I., & Rozhnev, A. G. (2001). *Linear Oscillations and Waves*: Textbook. Moscow: Fizmatlit. (in Russian)

REFERENCES

- Eremeev, V. S., Kuz'minov, V. V., Brezhnev, A. V., Doneva, O. V., & Petrenko I. A. (2016). The problem of modeling vibrational processes in one-dimensional crystals using mathematical pendulums. *Universitetskaja Nauka*, (1), 172-174. (in Russian)

Про авторів:

Еремеев Володимир Сергійович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформатики і кібернетики, Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (вул. Гетьманська, 20, м. Мелітополь, Україна, 72312), **ORCID**: <http://orcid.org/0000-0002-0131-0049>, evs1938@gmail.com

Брянцев Олександр Анатолійович, старший викладач кафедри інформатики і кібернетики, Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (вул. Гетьманська, 20, м. Мелітополь, Україна, 72312), **ORCID**: <http://orcid.org/0000-0002-1652-9449>, albrypaper@gmail.com

Наумук Олексій Володимирович, кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри інформатики і кібернетики, Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (вул. Гетьманська, 20, м. Мелітополь, Україна, 72312), **ORCID**: <http://orcid.org/0000-0002-3246-8260>, naumukl@gmail.com

Самойлов Володимир Вікторович, студент бакалавріату спеціальності «Середня освіта (Інформатика)», Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (вул. Гетьманська, 20, м. Мелітополь, Україна, 72312), **ORCID**: <http://orcid.org/0000-0001-8777-3281>, vladimir.samoylov.2001@gmail.com

About the authors:

Volodymyr Yermieiev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Informatics and Cybernetics, Bogdan Khmel'nitsky Melitopol state pedagogical university (20 Hetmanska Str., Melitopol, Ukraine, 72312), **ORCID**: <http://orcid.org/0000-0002-0131-0049>, evs1938@gmail.com

Oleksandr Briantsev, Senior Lecturer of the Department of Informatics and Cybernetics, Bogdan Khmel'nitsky Melitopol state pedagogical university (20 Hetmanska Str., Melitopol, Ukraine, 72312), **ORCID**: <http://orcid.org/0000-0002-1652-9449>, albrypaper@gmail.com

Oleksii Naumuk, Candidate of Pedagogical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Informatics and Cybernetics, Bogdan Khmelnytsky Melitopol state pedagogical university (20 Hetmanska Str., Melitopol, Ukraine, 72312), **ORCID**: <http://orcid.org/0000-0002-3246-8260>, naumukl@gmail.com

Volodymyr Samoilov, Student of the bachelor undergraduate, specialty "Secondary education (Informatics)", Bogdan Khmelnytsky Melitopol state pedagogical university (20 Hetmanska Str., Melitopol, Ukraine, 72312), **ORCID**: <http://orcid.org/0000-0001-8777-3281>, vladimir.samoylov.2001@gmail.com